Identité

Définition

$$\begin{cases} u_{n+1} = k \cdot (u_n + v_n) \\ v_{n+1} = u_n \times v_n \end{cases}$$

Points fixes

$(0, 0)$ et $\left(1, \frac{1}{k} - 1\right)$.

Cycles de longueur 2

Pour $k = 0.5$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n = \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \\ v_n = \frac{-3-3\sqrt{5}}{2} \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{n+1} = \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \\ v_{n+1} = \frac{-3+3\sqrt{5}}{2} \end{array} \right.$$

Cas général

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n = \frac{1}{2}\left(-1 - \frac{1}{k} + \sqrt{\left(1+\frac{1}{k}\right)^2 - 4}\right) \\ v_n = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1 - \frac{1}{k} - \sqrt{\left(1+\frac{1}{k}\right)^2 - 4}\right) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1 - \frac{1}{k} - \sqrt{\left(1+\frac{1}{k}\right)^2 - 4}\right) \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1 - \frac{1}{k} + \sqrt{\left(1+\frac{1}{k}\right)^2 - 4}\right) \end{array} \right.$$

Courbes de convergence

Antécédents des valeurs décrites par la droite $y = -x$ (avec $k = 0.5$) :

$$\begin{cases} a1(t) = t + \sqrt{t^2 - t} \\ b1(t) = t - \sqrt{t^2 - t} \end{cases}, t \in \mathbb{R} - [0; 1]$$

$$\begin{cases} a2(t) = t + \sqrt{t^2 - t} + \sqrt{\left(t + \sqrt{t^2 - t}\right)^2 - t - \sqrt{t^2 - t}} \\ b2(t) = t + \sqrt{t^2 - t} - \sqrt{\left(t + \sqrt{t^2 - t}\right)^2 - t - \sqrt{t^2 - t}} \end{cases}$$

$$\{\ldots$$

Fractale ?

Observation : point $(1, 1)$

Observation : dans le plan complexe

Mesure : dimension fractale