Béryl : Une fractale originale

Samuel Bizien

1 Introduction

1.1 Cékoiça ?

Ce document présente de manière sensiblement exhaustive l'étude d'un ensemble, que j'appelle Béryl, réalisée dans le cadre de mon TIPE[1], réalisé pendant l'année 2007-2008 au lycée Camille Pissarro.

1.2 Béryl ?

Choisissez deux nombres, au hasard. Prenez la somme et le produit de ces nombres. Prenez ensuite la somme et le produit des nombres que vous venez de trouver, et continuez ainsi jusqu'à ce que vous en ayez assez. Que va-t-il se passer ? Quel va être le comportement de cette suite de nombres ? C'est la question à laquelle nous allons essayer de répondre dans ce document.

D'abord, on constate que suivant les valeurs choisies, la suite peut converger, comme elle peut diverger. Par exemple, si vous prenez 1 et 1 comme valeurs initiales, les valeurs suivantes sont 2 et 1, puis 3 et 2, puis 5 et 6, puis 11 et 30, etc. Il semble que les termes vont être de plus en plus grand (dans ce cas, il n'est pas difficile de prouver que les termes vont tendre vers l'infini). Par contre, si l'on prend 0.5 et -0.7 comme valeurs initiales, les valeurs suivantes sont -0.2 et -0.35, -0.55 et 0.07, -0.48, -0.0385 et semble plus difficile de savoir si la suivte va converger, tendre vers l'infini ou diverger d'une autre façon. En fait, dans ce dernier cas, la suite va converger, mais c'est assez difficile à prouver.

Avant toute étude, il faut définir l'objet de l'étude. Définissons donc : Béryl est l'ensemble des valeurs réelles et complexes pour lesquelles la suite définie ci-dessus est bornée.

[1] Travail d'Initiative Personnelle Encadré

De manière plus générale, précise et mathématique : Soit $k \in]0;1]$, considérons l'application :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (k(x+y), xy) \end{array}$$

Béryl est alors l'ensemble des valeurs (a,b) complexes telles que la suite définie par itération de f et par les valeurs initiales a et b soit bornée.

1.3 Fractale ?

C'est un néologisme, inventé par le mathématicien Benoît MANDELBROT, et voici la définition qu'il en donne[2] :

> FRACTALE : *n. f.* Ensemble mathématique ou objet physique fractal.
>
> FRACTAL : *adj.* Sens intuitif. Se dit d'une figure géométrique qui combine les caractéristiques que voici :
>
> A) Ses parties ont la même forme ou structure que le tout, à ceci près qu'elles sont à une échelle différente et peuvent être légèrement déformées.
>
> B) Sa forme est soit extrêmement irrégulière, soit extrêmement fragmentée quelle que soit l'échelle d'examen.
>
> C) Il contient des « éléments distinctifs » dont les échelles très variées couvrent une très large gamme.

Des fractals physique connus sont, par exemple, certains nuages, les arbres, les chou-fleurs, etc. Il existe aussi des formes mathématiques que l'on qualifie de fractales, et c'est d'ailleurs le sujet de ce document : déterminer les caractéristiques fractales de Béryl.

[2] Source : MANDELBROT, Benoît. « Lexique de néologismes ». In *Les objets fractals*. Paris : Flammarion, 1995 (4ème édition). p. 154

2 Valeurs calculabes contenues dans Béryl

2.1 Points fixes et cycles

De manière relativement évidente, si a et b sont tels que $f(a,b) = (a,b)$, alors la suite ayant pour valeurs initiales a et b va être constante, donc bornée[3].

Une résolution mathématique[4] nous permet de trouver deux points fixes : $(0,0)$ et $\left(1, \frac{1}{k} - 1\right)$. Dans le cas particulier où k veut 1, toutes les valeurs de la forme $(x,0)$, avec x complexe, sont des points fixes. Daprès ce que nous avons dit précédemment, ces points sont contenus dans l'ensemble Béryl.

Il apparait aussi évident que si a et b sont tels que $f(f(a,b)) = (a,b)$, alors la suite va être bornée, car elle prendra au plus deux valeurs différentes.

La résolution est ici plus compliquée[5], et nous amène à trouver, en plus des points fixes précédemment cités, les valeurs :

$$\left(\frac{1}{2}\left(-1 - \frac{1}{k} + \sqrt{\left(1+\frac{1}{k}\right)^2 - 4}\right), \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1 - \frac{1}{k} - \sqrt{\left(1+\frac{1}{k}\right)^2 - 4}\right)\right)$$
$$\left(-\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{k} + \sqrt{\left(1+\frac{1}{k}\right)^2 - 4}\right), \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1 - \frac{1}{k} + \sqrt{\left(1+\frac{1}{k}\right)^2 - 4}\right)\right)$$

2.2 Droites et courbes chez les réels

Ici, on se place parmi les réels, pour avoir une vision plus simple de l'étude.

Réfléchissons rapidement. Si, à un rang donné, la suite prend une valeur de la forme $(x,0)$, alors toutes les valeurs suivantes vont être de la même forme, et la suite va être borné à partir de ce rang, car la première variable (celle qui est non nulle) sera une suite géométrique de raison k, inférieure ou égale à 1. Par conséquent, la suite sera bornée[6].

Ce raisonnement nous prouve que la droite $(x,0)$ $(x \in \mathbb{R})$ est comprise dans l'ensemble.

Nous pouvons poursuivre ce raisonnement, en cherchant les valeurs (a,b) telles que $f(a,b)$ soit de la forme $(x,0)$. On trouve les valeurs de la forme $(a,0)$ (c'est la conséquence directe du raisonnement ci-dessus), et les valeurs de la forme

[3] Les plus pointilleux, qui doutent de cette affirmation non prouvée, sauront faire une récurrence simple, que je ne détaille pas.

[4] détaillée dans l'annexe à ce document, disponible sur internet à l'adresse http://samuel.bizien.info/nouvelle_fractale/dossier/tipe/SectionP/annexe.pdf.

[5] Toutes les preuves sont dans l'annexe, pour les moins crédules.

[6] Petit exo facile : montrer l'équivalence entre le caractère borné d'une suite et le caractère « borné à partir d'un certain rang ».

$(a, -a)$. Nous avons donc un second résultat : la droite $y = -x$, dans le plan $\mathbb{R}^2$ usuel, est contenue dans l'ensemble Béryl. En cherchant les antécédents successifs de cette droite, on trouve aussi un ensemble de courbes dont on sait qu'elles sont contenues dans Béryl.

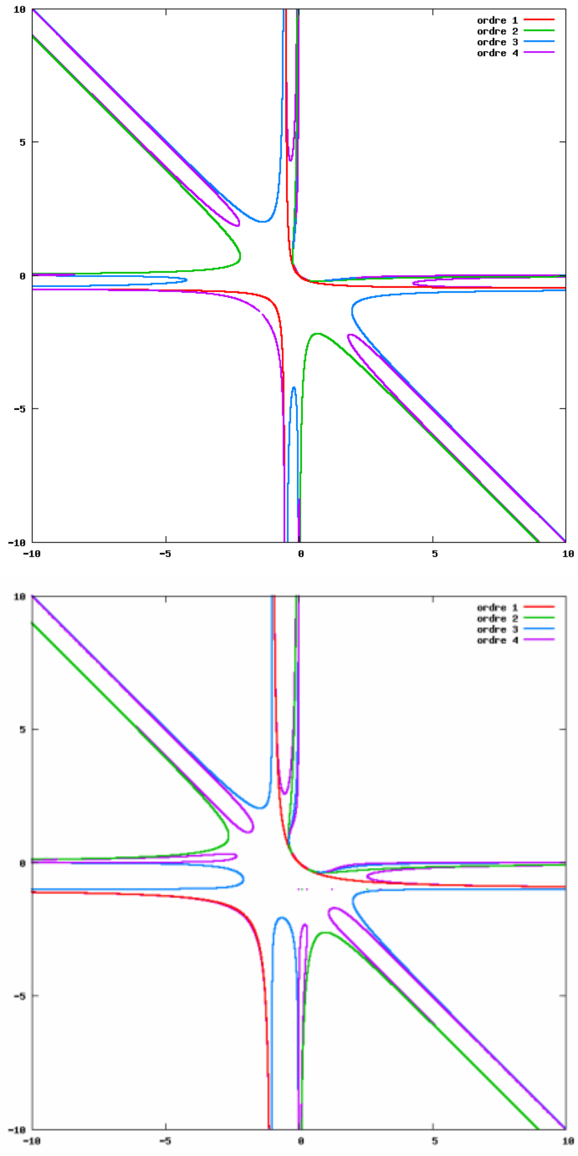

Fig. 1 – Courbes antécédents de $y = -x$ pour k valant 0.5 puis 1

3 Représenter Béryl

3.1 Comment ?

Il semble difficile de représenter géométriquement un tel ensemble. On va donc, pour le représenter, choisir la définition de base : pour chaque valeur (a, b), on va déterminer si le couple est dans l'ensemble ou non, c'est-à-dire savoir si la suite construite par itération de f est bornée ou non.

Cela ne va pas pouvoir être fait manuellement. Il va donc falloir demander à l'ordinateur de dessiner Béryl pour nous. Or, l'ordinateur ne sait produire que des images planes, en deux dimensions. Dans $\mathbb{C}$, notre ensemble est de dimension 4. On ne va donc représenter que des coupes, en deux dimensions, de l'ensemble.

Se pose alors le problème de vérifier le caractère borné (ou non) de la suite. La définition mathématique d'une suite bornée fait appel à l'ensemble des termes de la suite, un ensemble infini. Or, l'infini n'est accessible qu'à un mathématicien, et un ordinateur ne pourra jamais s'en approcher. Une solution barbare, physicienne, consisterait à calculer un nombre arbitrairement grand de termes de la suite, et de considérer que si les termes ne dépassent pas un nombre assez grand, alors elle est bornée. Cette solution fait fi de ce que nous avons vu précédemment, notamment que l'ensemble lui-même n'est pas borné (puisque que l'on trouve des droites à l'intérieur).

Il existe une autre solution, une vraie solution mathématique : considérer les parties de $\mathbb{C}^2$ stables par f. Par récurrence, si un des termes de la suite est dans une telle partie, tous les termes suivants le sont aussi. Pour peu qu'une telle partie soit bornée, nous savons que la suite est bornée. Si la partie n'est pas bornée, il se peut qu'on trouve un argument assurant le caractère non borné de la suite[7]. Bien entendu, les parties que l'on va trouver ne recouvriront pas $\mathbb{C}^2$ tout entier[8], mais il suffira de calculer un nombre limité de termes, en espérant que l'un de ces termes se trouve dans une telle partie stable. Dans le cas contraire subsiste une incertitude, que l'on ne cherchera pas à éliminer ici, considérant que ce dernier cas est marginal, très peu présent[9].

[7] Et d'ailleurs, c'est ce qu'on va trouver (quel heureuse coïncidence !).

[8] Sauf en considérant Béryl et son complémentaire, ce qui serait relativement absurde, puisque l'on cherche à représenter ces ensembles.

[9] Hypothèse confirmée plus tard par les calculs, pour $k < 1$.

3.2 Parties stables par f

Définissons :

$$F_0 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{C}^2, 2k + 1 \leq |x| \leq \left(\frac{k}{k+1} \right) |y| \right\}$$

Il se trouve que cette partie est stable par f[10]. De plus, puisque le module de la première variable de la suite est minoré par une valeur strictement plus grande que 1, le module de la seconde est minoré par une suite géométrique de raison strictement supérieure à 1 : la suite ne sera donc pas bornée[11].

De même, définissons, pour k strictement inférieur à 1 :

$$E_0 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{C}^2, |x| \leq 1, |y| \leq \frac{1}{k} - 1 \right\}$$

Cette partie est aussi stable par f. On a déjà remarqué que le point $\left(1, \frac{1}{k} - 1\right)$ était un point fixe. Il est donc normal de trouver qu'il est dans l'ensemble.

Cependant, bien que cette définition de E_0 reste une partie stable pour k valant 1, elle n'est pas appliquable car E_0 est alors un segment. Son « volume » étant nul, il est peu probable qu'un des termes de la suite puisse atterrir dans cette partie. Dans ce cas, il faut une autre définition de E_0. Je propose :

$$E_0 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{C}^2, |x| \leq 1 - 2\sqrt{|y|} \right\}$$

Ici, la preuve de la stabilité de E_0 par f est plus intéressante, et serait presque élégante si elle n'était pas si calculatoire. Elle est aussi dans l'annexe.

3.3 Quelques images

Comme nous l'avons déjà dit, nous n'allons représenter que des coupes en deux dimension de Béryl. Quelles coupes ? Il semble naturel de prendre des coupes dont les axes soient les axes réels ou complexes. Ainsi, on observera principalement les coupes ayant pour axes $Re(a)$ et $Re(b)$ (si $Im(a)$ et $Im(b)$ sont nuls, on a la représentation de Béryl pour des valeurs initiales réelles), et celles ayant pour axes $Re(a)$ et $Im(a)$ (b est alors fixé, et a évolue dans le plan complexe).

Observons donc quelques unes de ces coupes, pour différentes valeurs de k.

[10]Comment ça, pas vrai ? Ok, Ok, vous avez raison. C'est pas vrai. Pas avant que vous n'alliez vérifier et éventuellement corriger la preuve, dans l'annexe aussi.

[11]Au fait, j'ai pas précisé : il est évident que vous choisissez la norme de $\mathbb{C}^2$ que vous voulez pour évaluer le caractère borné de la suite. On est en dimension finie ici, toutes les normes sont équivalentes.

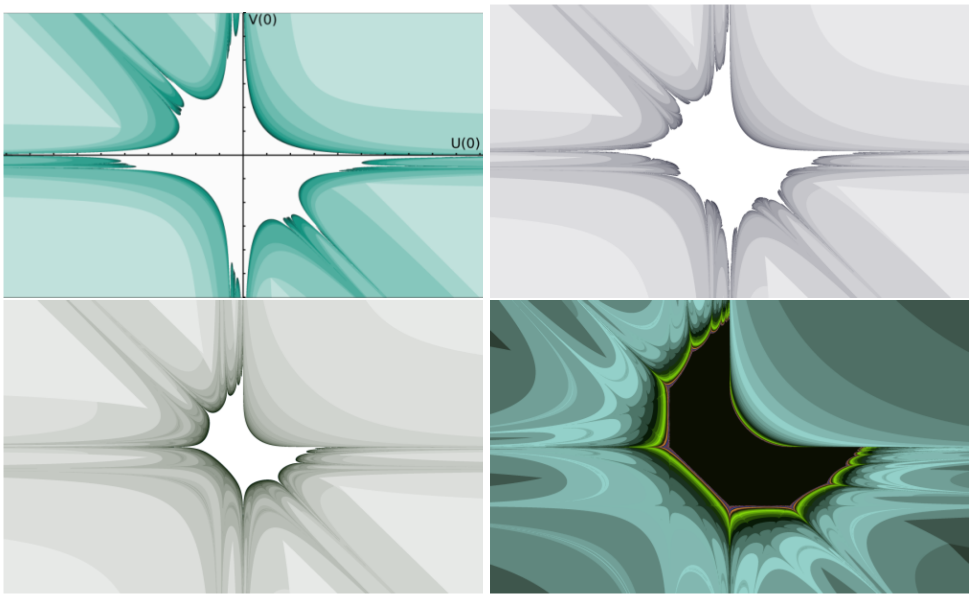

FIG. 2 – Coupes de Béryl par le plan défini avec les axes réels, pour k valant 0.5, 0.7, 0.9 puis 1

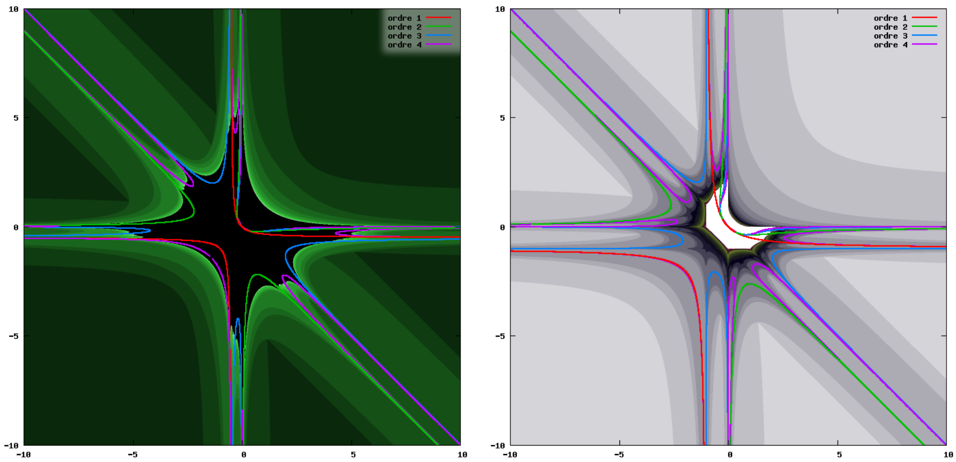

FIG. 3 – Superposition des courbes de convergence et de la coupe de Béryl pour k valant 0.5 puis 1

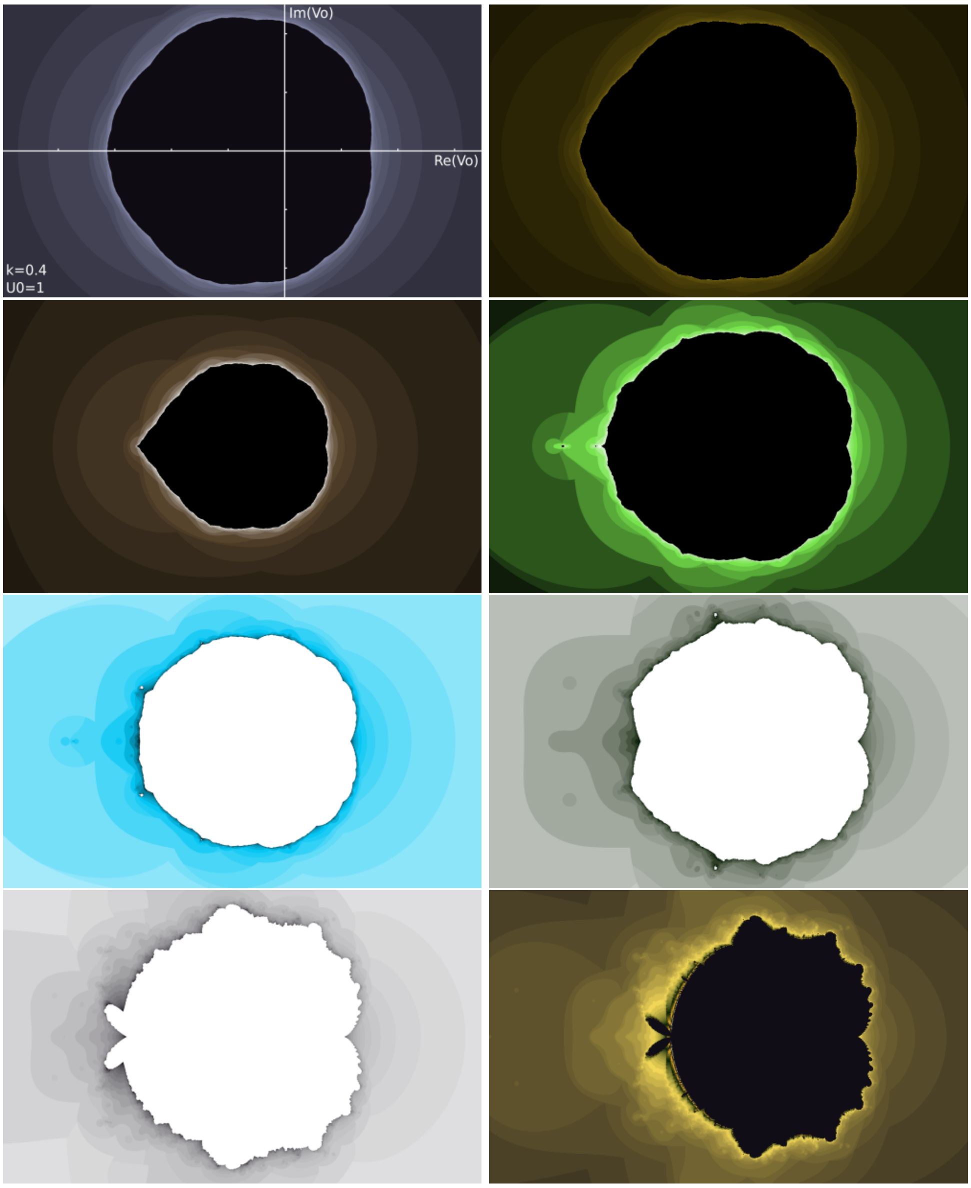

FIG. 4 – Coupes de Béryl par le plan $v_0 = 1$, pour k valant 0.4, 0.6, 0.7, 0.9, 0.99 puis 1

4 Dimension fractale

4.1 Le concept

Sur les figures précédentes, il semble que la frontière de la coupe de Béryl par le plan $v_0 = 1$ devient plus irrégulière quand k tend vers 1. Comment mesurer cet aspect irrégulier ?

Pour répondre à cette question, les mathématiciens introduisent le concept de dimension fractale, une extension du concept de dimension à des valeurs non entières. Considérons un segment de longueur l : il vous faudra 2 segments de longueur $\frac{l}{2}$ pour recouvrir le segment initial, 4 segments de longueur $\frac{l}{4}$ pour recouvrir ce segment, etc. Pour un carré de largeur l, il vous faudra 4 carrés de largeur $\frac{l}{2}$ pour recouvrir le premier carré, 16 carrés de largeur $\frac{l}{4}$ pour recouvrir ce même carré, etc. Pour un cube de largeur l, il vous en faudra 8 de largeur $\frac{l}{2}$, 64 de largeur $\frac{l}{4}$, etc. De manière générale, pour un objet de largeur l et de dimension D, il faut $N = (\frac{l}{l'})^D$ éléments de largeur l' pour recouvrir la forme initiale.

Partant de l'idée que l'on trouve une relation du même type pour les fractales, on passe au logarithme pour trouver la dimension D. De manière plus formelle, on utilise ici la définition de Minkowski-Bouligand de la dimension fractale (il en existe plusieurs) : dans un espace vectoriel normé, si on note $N(\varepsilon)$ le nombre de boules de rayon ε nécessaires pour recouvrir l'ensemble dont on cherche la dimension, alors :

$$D = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log(N(\varepsilon))}{\log(\frac{1}{\varepsilon})}$$

Dans notre cas, on va chercher la dimension fractale de la frontière de la coupe de Béryl par le plan $v_0 = 1$. Les boules seront donc de deux dimension.

4.2 Mise en œuvre

D'abord, plutôt que considérer des boules rondes, on va considérer des boules carrées, c'est plus simple. Autrement dit, la norme choisie dans notre plan correspond à $N_\infty(x, y) = \max(|x|, |y|)$.

On va réaliser un programme qui va considérer des ε de plus en plus petit, et pour chaque ε mesurer $N(\varepsilon)$, puis écrire le résultat dans un fichier. Graphiquement, $N(\varepsilon)$ correspond au nombre de cases grisées dans la figure 5

D'un point de vue technique, le programme est simplement constitué de boucles et d'une fonction déterminant si un point est à l'intérieur ou à l'extérieur de l'ensemble. Le programme parcourt la grille, et pour chaque carreau cherche à déterminer si tous les sommets sont à l'extérieur de la grille, s'ils sont tous à l'intérieur,

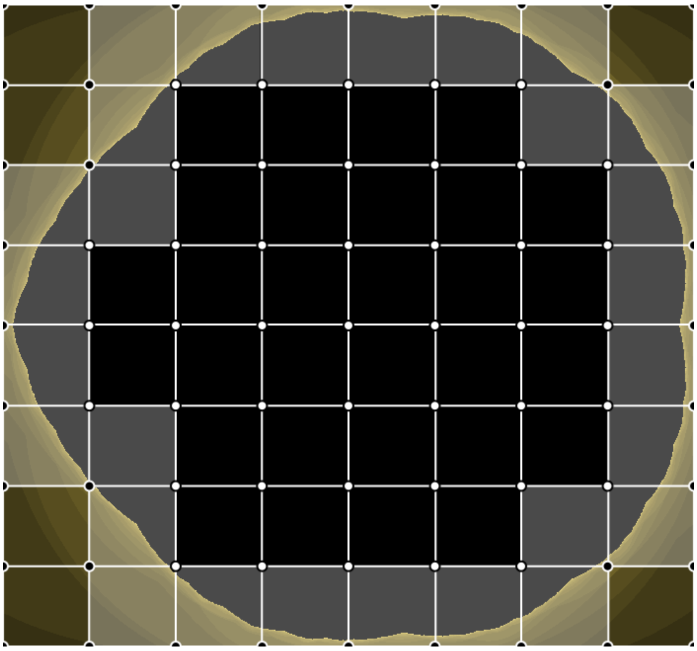

FIG. 5 – Illustration des mesures faites pour trouver la dimension de Minkowski-Bouligand : les points à l'intérieur sont en planc, les autres en noir.

ou s'il y en a à l'extérieur et d'autres à l'intérieur. Dans le dernier cas, le nombre de carreaux trouvés est incrémenté.

Pour améliorer la précision de la mesure, pour chaque ε, on fait plusieurs mesures en décalant à chaque fois légèrement la grille. Cela peut potentiellement changer le nombre $N(\varepsilon)$ trouvé, il est donc important d'avoir une mesure de l'incertitude.

Le programme réalisé est parfaitement adaptable à d'autres types de fractales : vous pouvez le télécharger et le modifier pour vos propres fractales (il est sous licence libre GPL). Il existe un fichier en pascal (`http://samuel.bizien.info/nouvelle_fractale/dossier/Dimension/calcdim.pas`), et un ensemble de 4 fichiers en C (`http://samuel.bizien.info/nouvelle_fractale/dossier/Dimension/dimension-c.zip`), ayant exactement la même fonction.

4.3 Résultats

Avant toute étude, il convient de vérifier que nos hypothèses ne sont pas contredites par les données que nous trouvons, c'est-à-dire vérifier que $N(\varepsilon)$ évolue sensiblement comme une puissance de $\frac{1}{\varepsilon}$. Pour cela, observons représenté les données trouvées pour une valeur particulière de k sur la figure 6. Manifestement, l'hypothèse semble raisonnable.

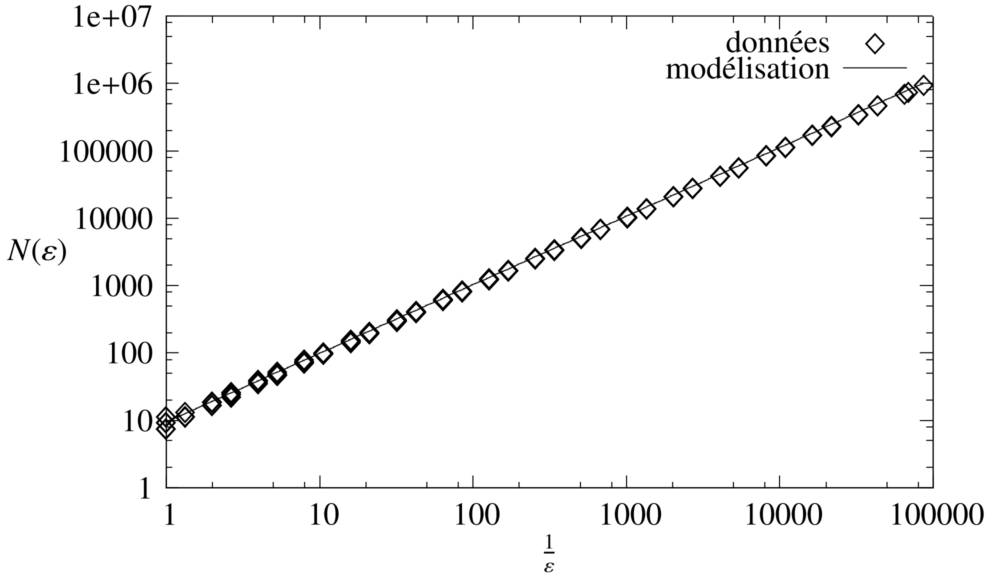

Fig. 6 – Représentation des données trouvées pour k valant 0.7 et de la modélisation trouvée, sur une échelle logarithmique

Pour trouver la dimension, il suffit ensuite de faire une régression linéaire sur les logarithmes de $N(\varepsilon)$ et $\frac{1}{\varepsilon}$.

Les résultats sont conformes à ce que nous avons intuité précédemment : la dimension fractale augmente avec k. D'abord, entre 0.5 et 0.8, cette dimension est assez faible. Mais elle croit rapidement quand k s'approche de 1, jusqu'à 1.3 (figure 7). Il apparait aussi que l'incertitude sur cette grandeur augmente avec k.

Ces résultats dont un argument pour qualifier Béryl de « fractal », et on peut même, dans une certaine mesure, quantifier cet aspect fractal.

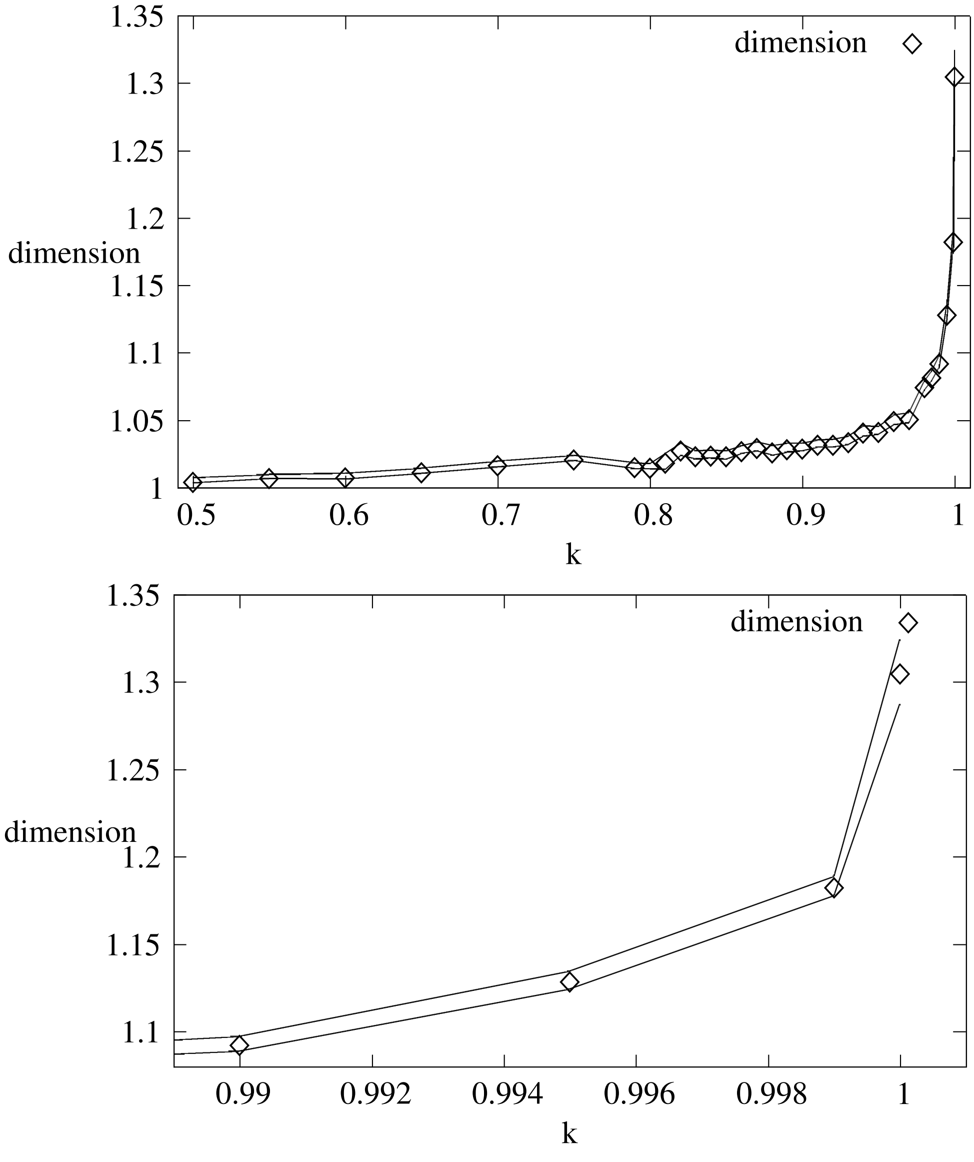

FIG. 7 – Représentation de la dimension fractale en fonction de k

5 Conclusion

5.1 Originale ?

En quoi Béryl est-elle « originale » ? Mathématiquement, il me semble difficile de quantifier cet aspect. Cependant, on observe un phénomène intéressant, quand k s'approche de 1 : des formes aux allures de spirales se forment, mais ne sont jamais complètes (pour ce que j'en ai vu). Pour k strictement inférieur à 1, les formes spirales finissent en une patatoïde fractale, et ne sont pas réellement invariantes par changement d'échelle, alors qu'il semble que pour k valant 1, c'est le cas. Ainsi, sur les images de la firgure 8 [12], les spirales semblent avoir une fin. Ce n'est pas le cas sur les images de la figure 9.

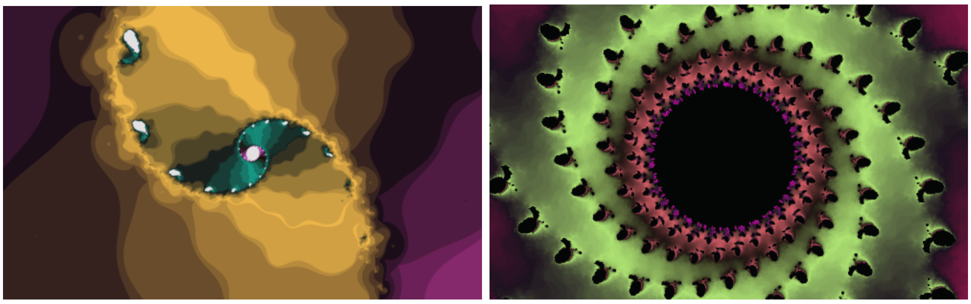

FIG. 8 – Des pseudo-spirales, qui ne sont pas invariantes par changement d'échelle. La première pour $k = 0.995$, et la seconde pour $k = 0.9999$.

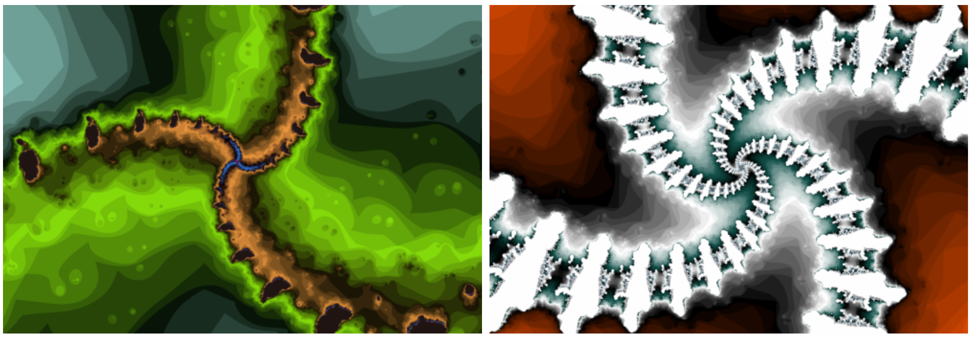

FIG. 9 – Ces spirales semblent être invariantes par changement d'échelle, pour autant que le zoom du logiciel permette d'en juger.

Pour le plaisir, on pourrait aussi chercher à définir Béryl dans d'autres espaces

[12] D'ailleurs, la seconde image est vue avec une précision de 10^{-56} unités, c'est plus petit que le rapport entre le rayon d'un atome et la taille de l'univers « visible ». Preuve, s'il en fallait, que les mathématiciens observent des d'étails qui échappent au physicien.

que $\mathbb{C}^2$: la définition est utilisable dans toute algèbre, et une partie de l'étude se transpose très bien dans n'importe quelle algèbre normée. Ainsi, on pourrait définir une fractale dans l'ensemble des matrices carrées d'ordre n, par exemple.

Par ailleurs, Béryl, pour k proche de 1, présente une structure assez étrange, que je ne crois pas avoir déjà vue ailleurs. Cette structure est presque omniprésente sur la frontière de Béryl, à toutes les échelles, pour les coupes par les plans de la forme v_0 = constante. Regardez par vous-même : figure 10.

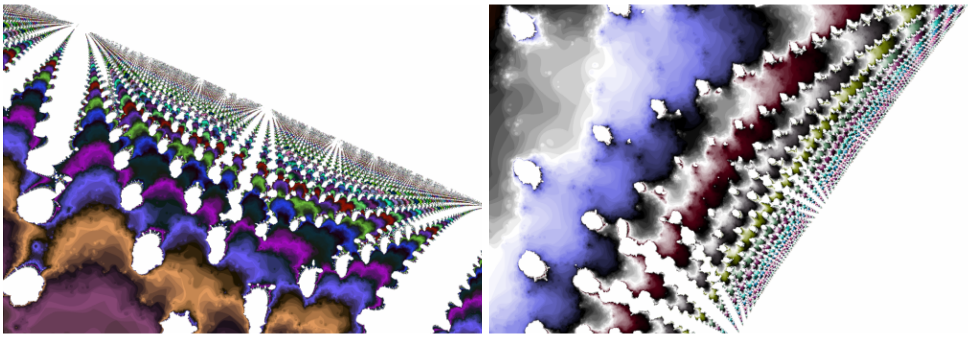

Fig. 10 – Une structure particulière ... unique ?

5.2 Copyright

Ce document a été écrit en 2008 par moi, Samuel Bizien, et est donc soumis au droit d'auteur. Cependant, je le place sous licence GNU Free Documentation License (version 1.2 ou suivante), ce qui vous permet de le copier, le modifier et redistribuer les modifications, sous certaines conditions. Le texte de cette licence est disponible sur internet : http://www.gnu.org/licenses/fdl-1.2.txt.

La source de ce document est un fichier LaTeX, disponible à l'adresse http://samuel.bizien.info/nouvelle_fractale/dossier/synthèse/beryl.tex.

Les images qui y sont liées sont placées dans le domaine public.

Les programmes réalisés dans le cadre de ce TIPE sont eux placés sous licence GNU General Public License (version 3 ou suivante) : vous pouvez donc en étudier le code source, le copier, le modifier, et redistrivuer les copies modifiées, à condition de placer ces travaux dérivés sous la même licence. Le texte de la licence est diponible sur internet : http://www.gnu.org/licenses/gpl.txt.

Table des matières